## §13. Функция Грина

Цель: поправить фундаментальную формулу Грина так, чтобы она содержала только одну краевую функцию.

Функция Грина: $G(x,y) = E(x-y) + g(x,y)$, $x, y \in \Omega$, $x \neq y$.

Здесь $E(x-y)$ - фундаментальное решение, $g(x,y)$ определена по $x$ в $\overline{\Omega}$ для $\forall y \in \Omega$, причем

1) $g(\cdot, y) \in C^2(\overline{\Omega})$ и $\Delta_x g(x,y) = 0$ в $\Omega$ для $\forall y \in \Omega$;
2) $G(x,y)\big|_{x \in \partial\Omega} = 0$ для $\forall y \in \Omega$;
3) Если $\Omega$ - неограниченная область, то

$$G(x,y) = \underline{\underline{O}}(1) \text{ при } |x| \to \infty \text{ для } \forall y \in \Omega \quad (n=2),$$

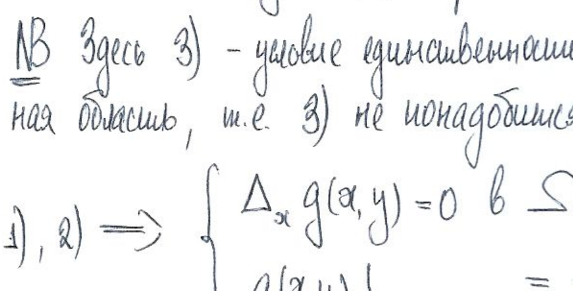
$$G(x,y) = \overline{\overline{o}}(1) \text{ при } |x| \to \infty \text{ для } \forall y \in \Omega \quad (n \geq 3).$$

NB Здесь 3) - условие единственности на бесконечности. На лекциях $\Omega$ всегда ограниченная область, т.е. 3) не понадобится.

$$1), 2) \Longrightarrow \begin{cases} \Delta_x g(x,y) = 0 \text{ в } \Omega \\ g(x,y)\big|_{x \in \partial\Omega} = -E(x-y)\big|_{x \in \partial\Omega} \end{cases} \quad \text{для } \forall y \in \Omega.$$

Для $\forall y \in \Omega$ решение такой з. Дирихле должно быть единственным. $\Longrightarrow$ Если ф-ция Грина $\exists$-ет, то она определена однозначно (единственность функции Грина).

Теор. (симметричность функции Грина). $G(x,y) = G(y,x)$ для $\forall x, y \in \Omega$, $x \neq y$.




Док-во. Зафиксируем $x, y \in \Omega$, $x \neq y$. Пусть $\varepsilon > 0$ - малое число,

$$\Omega_\varepsilon \equiv \Omega \setminus \{\overline{B_\varepsilon(x)} \cup \overline{B_\varepsilon(y)}\}.$$

Функции $u(z)=G(z,x)$, $v(z)=G(z,y)$ гармонические в $\Omega_\varepsilon$, причем $u|_{\partial\Omega}\equiv 0$, $v|_{\partial\Omega}\equiv 0$ (по св-вам функции Грина). Вторая ф-ла Грина:

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\big(u(z)\Delta v(z)-v(z)\Delta u(z)\big)\,dz=\int\limits_{\partial\Omega_\varepsilon}\Big(u(z)\frac{\partial v(z)}{\partial\nu_z}-v(z)\frac{\partial u(z)}{\partial\nu_z}\Big)\,ds_z.$$

Здесь останутся только слагаемые по сферам $|z-x|=\varepsilon$, $|z-y|=\varepsilon$, т.е.

$$\int\limits_{|z-x|=\varepsilon}\Big(G(z,x)\frac{\partial G(z,y)}{\partial\nu_z}-G(z,y)\frac{\partial G(z,x)}{\partial\nu_z}\Big)ds_z+$$
$$+\int\limits_{|z-y|=\varepsilon}\Big(G(z,x)\frac{\partial G(z,y)}{\partial\nu_z}-G(z,y)\frac{\partial G(z,x)}{\partial\nu_z}\Big)ds_z=0,\quad\forall\varepsilon,\ 0<\varepsilon<\varepsilon_0.$$

Кратко: $A+B+C+D=0$, где $G(z,x)=E(z-x)+g(z,x)$, $G(z,y)=E(z-y)+g(z,y)$.

Справедливы оценки

$|A|\leq\omega_n\varepsilon^{n-1}|E(\varepsilon)|\cdot M_1\to 0$ при $\varepsilon\to 0+$;

$B=\int\limits_{|z-x|=\varepsilon}G(z,y)\frac{1}{\omega_n\varepsilon^{n-1}}\,ds_z+\bar{\bar{o}}(1)\longrightarrow G(x,y)$ при $\varepsilon\to 0+$;

$C=\int\limits_{|z-y|=\varepsilon}G(z,x)\Big(-\frac{1}{\omega_n\varepsilon^{n-1}}\Big)ds_z+\bar{\bar{o}}(1)\longrightarrow\big(-G(y,x)\big)$ при $\varepsilon\to 0+$;

$|D|\leq\omega_n\varepsilon^{n-1}|E(\varepsilon)|\cdot M_2\to 0$ при $\varepsilon\to 0+$.

$\Rightarrow$ При $\varepsilon\to 0+$ получаем $G(x,y)-G(y,x)=0$ и $G(x,y)=G(y,x)$. □

Теперь выведем ключевую формулу. Рассм. з. Дирихле для ур-я Пуассона:

$$(*)\quad\begin{cases}\Delta u(x)=f(x)\ \text{в}\ \Omega,\\ u|_{\partial\Omega}=\varphi.\end{cases}$$

Допустим, что для области $\Omega$ $\exists$-ет функция Грина $G(x,y)=E(x-y)+g(x,y)$.

Пусть $u \in C^2(\overline{\Omega})$ – решение з. (*). Для $\forall x \in \Omega$ имеем

$$u(x) = \int_{\Omega} E(y-x)\Delta u(y)\,dy + \int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial E(y-x)}{\partial \nu_y}u(y) - E(y-x)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y}\right)ds_y =$$

$$= \int_{\Omega} E(y-x) f(y)\,dy + \int_{\partial\Omega}\frac{\partial E(y-x)}{\partial \nu_y}\varphi(y)\,ds_y + \underbrace{\int_{\partial\Omega} g(y,x)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y}ds_y}_{I}.$$

Запишем 2-ую формулу Грина для пары $g(y,x)$, $u(y)$ (при фиксированном $x$):

$$\int_{\Omega}\Big(g(y,x)\underbrace{\Delta u(y)}_{=f(y)} - u(y)\underbrace{\Delta g(y,x)}_{=0}\Big)dy = \underbrace{\int_{\partial\Omega}\Big(g(y,x)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y}}_{I} - \underbrace{u(y)}_{=\varphi(y)}\frac{\partial g(y,x)}{\partial \nu_y}\Big)ds_y.$$

$$\Rightarrow I \equiv \int_{\partial\Omega} g(y,x)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu_y}ds_y = \int_{\Omega} g(y,x) f(y)\,dy + \int_{\partial\Omega}\frac{\partial g(y,x)}{\partial \nu_y}\varphi(y)\,ds_y.$$

После подстановки получим

$$u(x) = \int_{\Omega} E(y-x) f(y)\,dy + \int_{\partial\Omega}\frac{\partial E(y-x)}{\partial \nu_y}\varphi(y)\,ds_y + \int_{\Omega} g(y,x) f(y)\,dy + \int_{\partial\Omega}\frac{\partial g(y,x)}{\partial \nu_y}\varphi(y)\,ds_y =$$

$$= \int_{\Omega} G(y,x) f(y)\,dy + \int_{\partial\Omega}\frac{\partial G(y,x)}{\partial \nu_y}\varphi(y)\,ds_y = \{\text{св-во симметрии}\} =$$

$$= \int_{\Omega} G(x,y) f(y)\,dy + \int_{\partial\Omega}\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu_y}\varphi(y)\,ds_y.$$

<u>NB</u> Значения $\left.\frac{\partial G(y,x)}{\partial \nu_y}\right|_{y\in\partial\Omega}$ и $\left.\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu_y}\right|_{y\in\partial\Omega}$ понимаются как предельные изнутри. Поэтому переход во втором интеграле законен.

<u>Теор.</u> Пусть для области $\Omega$ $\exists$-ет функция Грина и $u \in C^2(\overline{\Omega})$ – решение з. Дирихле (*). Тогда справедлива разрешающая формула:

$$\boxed{u(x) = \int_{\Omega} G(x,y) f(y)\,dy + \int_{\partial\Omega}\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu_y}\varphi(y)\,ds_y, \quad \forall x \in \Omega.}$$